TD 18 : Arithmétique Indications

Divisibilité, division euclidienne

1 ★★☆ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le reste de la division euclidienne de $1+2+\ldots+n$ par n.
Regarder pour des petites valeurs de n.

2 ★★☆ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $\quad n^2 \mid (n+1)^n - 1$
Réécrire $(n+1)^n - 1$.

3 ★★☆ Soit $a \in \mathbb{Z}$ et $b > 0$. On note q le quotient de la division euclidienne de a par b. Montrer que $q = \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor$.
Le résultat est-il encore vrai si $b < 0$?
De quelle caractérisation dispose-t-on sur $\left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor$? Montrer que q la vérifie.

4 ★★ Déterminer tous les entiers n tels que :

1) $n-1$ divise $n+2$
2) $n-4$ divise $3n-17$
3) $n+1$ divise n^3+4
4) n^2-2 divise $2n^3+3n^2-4n-6$

Pour le 1. (et idem pour le reste), raisonner par analyse-synthèse et exploiter le fait que $\begin{cases} n-1 \mid n+2 \\ n-1 \mid n-1 \end{cases}$ pour en déduire de nouvelles relations de divisibilité que doit vérifier $n-1$.

5 ★★☆ Montrer que la somme de 5 entiers consécutifs est divisible par 5.
Est-ce que la somme de 4 entiers consécutifs est divisible par 4 ?
Si on appelle k le plus petit des entiers consécutifs, les autres s'écrivent $k+1$, $k+2$...

6 ★★★ Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $40^n \times n!$ divise $(5n)!$
Après simplification par $n!$, on remarque que :

$$40^n n! \mid (5n)! \iff 40^n \mid \ldots$$

il faut utiliser cette information dans la récurrence.

PGCD, PPCM

7 ★ Déterminer tous les entiers qui divisent à la fois 318 et 282.
Cf cours sur le PGCD.

8 ★★☆ Calculer les PGCD des couples (a,b) suivants, ainsi que des coefficients de Bézout :

1. $(a,b) = (69,13)$
2. $(a,b) = (270,105)$

Cf cours sur le PGCD.

9 ★★ Soit $a,b \in \mathbb{Z}$. L'objectif est de montrer que $a \wedge b = 1 \iff (a+b) \wedge (ab) = 1$

1) Montrer le sens réciproque.
2) On suppose $a \wedge b = 1$. Montrer que $(a+b) \wedge a = 1$. En déduire que $(a+b) \wedge (ab) = 1$.

1) Poser $d = a \wedge b$ et montrer que $d \mid 1$.
2) Pour la deuxième partie de la question, penser à un corollaire du théorème de Bézout.

10 ★★ Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que les fractions $\frac{14n+3}{21n+4}$, $\frac{n^2+n}{2n+1}$, et $\frac{n^3+2n}{n^4+3n^2+1}$ sont irréductibles.
Dire que $\frac{a}{b}$ est irréductible revient à dire que $a \wedge b = 1$.

11 ★★ Soit $n \geq 2$ un entier. Calculer :

1) $n \vee (2n+1)$
2) $(n-1) \vee (2n+1)$

Pour la seconde, on pourra disjoindre les cas selon que $n-1$ soit divisible par 3 ou non.

12 ★★☆ Résoudre les systèmes suivants dans $\mathbb{N}^2$:

A) $\begin{cases} x \wedge y = 15 \\ xy = 900 \end{cases}$ B) $\begin{cases} x \wedge y = 5 \\ x \vee y = 60 \end{cases}$ C) $\begin{cases} x \wedge y = 10 \\ x + y = 100 \end{cases}$

À chaque fois, il faut se ramener à des entiers premiers entre eux : poser $d = x \wedge y$, et

$$x' = \frac{x}{d} \qquad y' = \frac{y}{d}$$

de sorte que x' et y' soient premiers entre eux. Il faut ensuite réécrire chaque système en fonction de x' et de y'.

Congruences

13 ★☆ Déterminer le reste de la division euclidienne de :

1) 7^{77} par 10
2) 5^{2025} par 11
3) 3^{80} par 17
4) 9^{10} par 12
5) 8^{88} par 6
6) 2^{40} par 10

La méthode a été vue en cours.

14 ★☆

1) Montrer par un tableau de congruence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'entier $5n^3 + n$ est divisible par 6.
2) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'entier $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ est divisible par 7.
3) Trouver m et n dans $\mathbb{N}$ tels que $m \equiv n \ [7]$ mais tels que $2^m \not\equiv 2^n \ [7]$.

En particulier, le tableau de congruence modulo 7 ne permettrait pas de conclure pour la question 2)... Cela ne marche pas si n est en puissance !

1) C'est un tableau de congruence qui diffère de celui vu en cours :

$n \equiv \ldots \ [6]$	0	1	2	3	4	5
$n^3 \equiv \ldots \ [6]$						
$5n^3 + n \equiv \ldots \ [6]$						

Il n'y a cette fois qu'un nombre fini de colonnes.

2) Le tableau précédent ne fonctionne pas avec des puissances (la q. 3 explique pourquoi).

15 ★☆ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le reste de la division euclidienne de $6^n - 1$ par 7 appartient à $\{0, 5\}$.
Reformuler l'exercice avec des congruences.

16 ★☆ (Équations de congruences) Résoudre dans $\mathbb{Z}$:

1) $6x \equiv 9 \ [15]$
2) $10x \equiv 5 \quad [34]$
3) $10x \equiv 6 \quad [34]$
4) $7x \equiv 11 \ [31]$

La méthode a été vue en cours.

17 ★★ Déterminer le dernier chiffre de 13^{13}.
Le dernier chiffre d'un entier a correspond au reste obtenu après division euclidienne par 10.

18 ★★

1) Montrer que si n est un entier impair, alors $n^2 \equiv 1 \ [8]$.
2) Montrer que si m est un entier pair, alors $m^2 \equiv 0 \ [8]$ ou $m^2 \equiv 4 \ [8]$.
3) En déduire que si a, b, c sont trois entiers impairs, alors $a^2 + b^2 + c^2$ n'est pas le carré d'un entier.

1) Cette question est un classique qu'on peut même résoudre sans les congruences, on l'a déjà fait au chapitre de logique !
2) Cela suit la même logique que la question 1.
3) Utiliser les deux questions précédentes.

19 ★★ (Critères de divisibilité) Soit $a \in \mathbb{N}$ un entier à N chiffres. Soit $a_{N-1}a_{N-2}\cdots a_0$ son écriture en base 10. On a donc

$$a = 10^{N-1}a_{N-1} + 10^{N-2}a_{N-2} + \ldots + 10a_1 + a_0$$

1) Montrer que $5 \mid a$ ssi $5 \mid a_0$.
(les critères pour $2 \mid a$ et $3 \mid a$ se montrent de même).
2) Montrer que $9 \mid a$ ssi $9 \mid a_{N-1} + \ldots + a_0$
3) On appelle somme alternée des chiffres de a le nombre
$$S(a) = a_{N-1} - a_{N-2} + \ldots + (-1)^{N-1}a_0$$
   (a) Montrer que $11 \mid a$ ssi $11 \mid S(a)$.
   (b) En déduire les entiers $k \in [\![0, 9]\!]$ tels que $4230 + k$ est divisible par 11.
4) On note q et r le quotient et le reste de la division euclidienne de n par 10.
   (a) Montrer que n est un multiple de 7 si et seulement si $q - 2r$ est multiple de 7.
   (b) En réitérant, on a donc un critère de divisibilité par 7. L'appliquer aux entiers 84, 173, 343, 526 et 1001.

Il s'agit le plus souvent de passer l'égalité à la congruence modulo 5, 9, 11, etc.

20 ★★☆ (**Exercice banque CCP**) On cherche à résoudre le système suivant, d'inconnue $x \in \mathbb{Z}$:

$$(S) : \quad \begin{cases} x \equiv 6 & [17] \\ x \equiv 5 & [16] \\ x \equiv 4 & [15] \end{cases}$$

1) Déterminer une solution particulière $x_0 \in \mathbb{Z}$.
2) En déduire les solutions de (S).

1) Tâtonner.
2) Remarquer que le système se réécrit alors $\begin{cases} x \equiv x_0 & [17] \\ x \equiv x_0 & [16] \\ x \equiv x_0 & [15] \end{cases}$

Équations diophantiennes

21 ★☆ Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ les équations suivantes :

1) $7x+12y=5$
2) $9x+15y=11$
3) $9x+15y=18$
4) $16x-3y=4$
5) $18x+7y=12$
6) $3x+7y=10^n$ $(n \in \mathbb{N})$

La méthode a été vue en cours.

22 ★★ Soit $a,b \in \mathbb{Z}^*$. Par la relation de Bézout, il existe $u_0, v_0 \in \mathbb{Z}$ tels que $au_0+bv_0 = a \wedge b$. Mais, quels sont TOUS les couples (u,v) tels que $au+bv = a \wedge b$? On les exprimera en fonction de a, b, u_0, v_0.
Il s'agit d'une équation diophantienne du type $ax+by=c$, où u et v sont nos inconnues !

23 ★★☆ Pour chaque équation, trouver tous les couples $(x,y) \in \mathbb{Z}^2$ solutions :

1) $3x^2+xy=11$
2) $x^2-y^2=5$
3) $xy=x+2y$
4) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{5}$

Raisonner par analyse-synthèse et faire apparaitre des produits pour en déduire des conditions nécessaires de divisibilité.

Nombres premiers, valuations

24 ★ (*Calcul de PGCD et de PPCM*) Pour chaque couple (a,b), décomposer les entiers a et b en produit de facteurs premiers et en déduire $a \wedge b$ puis $a \vee b$.

1) $(a,b)=(90,120)$
2) $(a,b)=(105,147)$
3) $(a,b)=(26,130)$
4) $(a,b)=(77,364)$

La technique a été vue en cours.

25 ★☆

1) Décomposer 360 et 1750 en produit de facteurs premiers.
2) Quel est le nombre de diviseurs positifs de 360 ? de 1750 ? qui sont communs à 360 et 1750 ?

Des exemples du cours permettent de faire cet exercice.

26 ★☆ Soit $a,b \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que si a^n divise b^n, alors a divise b.
Utiliser les valuations.

27 ★★ Quel est le plus petit entier strictement positif divisible par tous les entiers de 1 à 10 ?
Par définition, il s'agit du PPCM de tous les entiers de 1 à 10. Il faut le calculer !

28 ★★ Soit $n \geq 2$ un entier. Montrer qu'il n'existe aucun nombre premier entre $n!+2$ et $n!+n$.
Pourquoi $n!+2$ n'est pas premier ? Pourquoi $n!+n$ n'est pas premier ? Puis généraliser à tout entier entre $n!+2$ et $n!+n$...

29 ★★ Montrer que $\sqrt{2}$, $\dfrac{\ln 8}{\ln 7}$ et $\sqrt[5]{\dfrac{3}{4}}$ sont irrationnels.
Pour chaque nombre, raisonner par l'absurde et supposer qu'il s'écrit sous la forme $\dfrac{a}{b}$ avec $(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ et $a \wedge b = 1$ (fraction irréductible).

30 ★★ Soit $a,b \in \mathbb{N}^*$ et p un nombre premier.

1) Montrer que $v_p(a+b) \geq \min(v_p(a), v_p(b))$.
2) Trouver a, b et p tels que

$$v_p(a+b) > \min(v_p(a), v_p(b))$$

3) Montrer que si $v_p(a) \neq v_p(b)$, on a

$$v_p(a+b) = \min(v_p(a), v_p(b))$$

1) Poser $m = \min(v_p(a), v_p(b))$. Cela signifie en particulier que $m \leq v_p(a)$ et $m \leq v_p(b)$. Revenir ensuite à la définition de la valuation.

31 ★★☆

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$n^{21} \equiv n \ [N]$$

avec $N = 2$ puis $N = 3$ puis $N = 5$ puis $N = 11$.

2) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, 330 divise $n^{21} - n$.

1) Penser à un théorème bien précis du cours.

2) Par la question 1, les nombres 2, 3, 5 et 11 divisent $n^{21} - n$...

32 ★★★ Parmi les nombres de 1 à 100, combien sont divisibles par 5 ? par 25 ? En déduire le nombre de 0 apparaissant à la fin de l'écriture décimale du nombre 100!

Le nombre de 0 correspond au plus grand entier k tel que $10^k \mid 100!$. Si la décomposition de 100! en produits de facteurs premiers est $100! = 2^\alpha 3^\beta 5^\gamma \times \dots$ alors que vaut k en fonction de α et de γ ?

33 ★★★ Soit $p \geq 5$ un nombre premier. Montrer que 24 divise $p^2 - 1$.

Il suffit de montrer que 8 divise $p^2 - 1$ et 3 divise $p^2 - 1$. On pourra utiliser le fait que $p^2 - 1 = (p-1)(p+1)$.

34 ★★★☆ Pour tout entier $n \geq 2$, on désigne par N le nombre de diviseurs positifs de n et par P leur produit. Trouver une relation simple reliant n, N et P.

On pourra utiliser l'écriture $n = \prod_{i=1}^{r} p_i$ avec $p_1, \cdots, p_r$ des nombres premiers (non nécessairement distincts).